L3 SM	Université de Tours	Année 2014-2015

Mécanique quantique

02/04/2015 **durée du contrôle: 2h**

1. Considérons une particule de masse m dans un puits rectangulaire infini de largeur L en dimension 1, caractérisé par le potentiel

$$V(x) = \begin{cases} 0, & \text{pour } x \in \left]-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right[, \\ +\infty & \text{pour } x \notin \left]-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right[\end{cases}$$

Soient $\phi_n(x)$ (où $n = 0, 1, 2, \ldots$ note le numéro de l'état excité) les fonctions propres normalisées de l'hamiltonien $\hat{H}$.

- A l'instant $t = 0$, la particule se trouve dans un état de superposition décrit par la fonction d'onde normalisée

$$\psi(x) = \mathcal{A}\Big(3\phi_1(x) + 2i\phi_3(x) - \phi_5(x)\Big).$$

Quelles sont les unités de $\psi(x)$? Est-ce que cette fonction est propre pour $\hat{H}$? Si oui, donner la valeur propre correspondante. Si non, expliquer pourquoi.

- Calculer la constante $\mathcal{A}$. La normalisabilité de ψ fixe-t-elle cette constante complètement?
- Donner l'expression de la fonction d'onde en fonction du temps t. La densité de probabilité de trouver la particule en un point $x_0 \in \left]-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right[$ dépend-elle de t ? Que se passe-t-il si $x_0 = 0$?
- Calculer la valeur moyenne de l'énergie en fonction du temps.
- A l'instant $t = t_0 > 0$, on effectue une mesure de l'énergie et on obtient comme résultat la plus grande des valeurs admissibles. Donner l'expression de la fonction d'onde pour $t > t_0$.

2. Soit $\hat{H}$ l'hamiltonien d'une particule en 2D donné par

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2}{2m} - V_0 \exp\left\{-\frac{\hat{x}^2 + \hat{y}^2}{2R^2}\right\},$$

où V_0, R sont des paramètres constants, et soit $\hat{Q} = \hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x$.

- Discuter le mouvement classique la particule. Dans le cadre de la mécanique quantique le spectre de l'énergie est-il discret ou continu ? dégénéré ou non-dégénéré ? Argumenter.
- Calculer les commutateurs

$$\Big[\hat{Q}, \hat{x}\Big] = ? \qquad \Big[\hat{Q}, \hat{y}\Big] = ? \qquad \Big[\hat{Q}, \hat{p}_x\Big] = ? \qquad \Big[\hat{Q}, \hat{p}_y\Big] = ? \qquad \Big[\hat{Q}, \hat{H}\Big] = ?$$

et discuter les implications des relations ainsi obtenues.

- Construire à partir de m, R et $\hbar$ une quantité $\mathcal{E}$ qui a la dimension de l'énergie. Dans le régime $\mathcal{E} \ll V_0$, estimer la différence de l'énergie entre l'état fondamental et le premier état excité.

3. Imaginons une planète contrainte à se déplacer librement sur une sphère. L'hamiltonien qui décrit le mouvement de cette planète est $\hat{H} = \dfrac{\hat{\mathbf{L}}^2}{2I}$.

- Quelles sont les niveaux d'énergie de ce système, leurs multiplicités, et les fonctions propres associées ?

Supposons par la suite que notre planète possède son propre moment angulaire $\hat{\mathbf{S}}$ due à la rotation autour de son centre d'inertie. En plus, il est indépendant du moment angulaire $\hat{\mathbf{L}}$ associé au mouvement sur la sphère. Cela se traduit par les relations de commutation

$$[L_x, L_y] = i\hbar L_z, \qquad [L_y, L_z] = i\hbar L_x, \qquad [L_z, L_x] = i\hbar L_y,$$
$$[S_x, S_y] = i\hbar S_z\,, \qquad [S_y, S_z] = i\hbar S_x, \qquad [S_z, S_x] = i\hbar S_y,$$
$$[L_j, S_k] = 0, \qquad j, k = x, y, z.$$

Le moment angulaire total est alors

$$\hat{\mathbf{J}} = \hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{S}}, \qquad \hat{\mathbf{J}}^2 = \hat{\mathbf{L}}^2 + \hat{\mathbf{S}}^2 + 2\hat{\mathbf{L}} \cdot \hat{\mathbf{S}}.$$

- Est-il possible de mesurer simultanément $\hat{\mathbf{L}}^2$, $\hat{L}_z$, $\hat{\mathbf{S}}^2$ et $\hat{S}_z$?
- Est-il possible de trouver un état propre commun de $\hat{\mathbf{J}}^2$ et $\hat{\mathbf{L}}^2$? $\hat{\mathbf{J}}^2$ et $\hat{\mathbf{S}}^2$? Pourquoi ?
- La même question pour a) $\hat{\mathbf{J}}^2$ et $\hat{L}_z$; b) $\hat{\mathbf{J}}^2$ et $\hat{S}_z$; c) $\hat{\mathbf{J}}^2$ et $\hat{J}_z$.